Zwei Extremalaufgaben über Abbildungen, die durch Polynome vermittelt sind.

Von G. Szegő in Königsberg.

Im Laufe eines Briefwechsels ist mir von Herrn L. Fejér die folgende Frage vorgelegt worden[1]):

Es sei $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades, $f(a) = A$, $f'(a) \neq 0$. Man bezeichne mit α die zu a nächstgelegene Stelle, $\alpha \neq a$, an der die Schlichtheit von $f(z)$ „verletzt" ist, u. zw. in dem Sinne, daß $f(\alpha) = A$ wird. Es sei ferner β die zu a nächstgelegene Stelle, an der die Schlichtheit von $f(z)$ in dem Sinne $f'(\beta) = 0$ „verletzt" wird. Wie groß ist der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um den Punkt $z = a$ als Mittelpunkt, deren Bild bei jeder Abbildung $w = f(z)$

1. schlicht,
2. in bezug auf A sternförmig,
3. konvex

ausfällt; hierbei möge $f(z)$ die Gesamtheit aller Polynome eines festen Grades n durchlaufen, welche die Bedingung $f(a) = A$, $f'(a) \neq 0$ erfüllen, für welche ferner die Streckenlänge $\overline{a\alpha}$ bzw. $\overline{a\beta}$ vorgegeben ist.

Es sei die vorgeschriebene Länge der ersten Strecke d, die der zweiten D. Die gesuchten maximalen Radien hängen dann offensichtlich nur von n und d bzw. D ab. Bezeichnet man sie in der obigen Reihenfolge mit r_1, r_2, r_3, wenn d vorgeschrieben und mit R_1, R_2, R_3, wenn D vorgeschrieben ist, so gilt:

---

[1]) Sie entstand, wie er mir mitteilte, im Laufe einer Unterhaltung mit Herrn E. von Egerváry.

$$r_1 = \frac{d}{n}, \qquad R_1 = D \sin \frac{\pi}{n},$$

$$r_2 = \frac{d}{n}, \qquad R_2 = D \frac{\varrho_n}{n},$$

$$r_3 = d\,\frac{3n-1-\sqrt{(n-1)(5n-1)}}{2n^2} \sim \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,\frac{d}{n}, \quad R_3 = \frac{D}{n}.$$

Hier bezeichnet ϱ_n eine positive Zahl, deren Darstellung durch elementare Funktionen von n nicht möglich zu sein scheint; man hat

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n = \varrho = \sqrt{1+\tau^2} = 2{,}8329\ldots,$$

wobei τ die zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gelegene Wurzel der transzendenten Gleichung $e(\cos\tau + \tau\sin\tau) = 1$ bedeutet.[2])

Das obige Resultat ist nicht ganz neu. Es gilt zunächst infolge eines bekannten Zusammenhanges zwischen sternförmigen und konvexen Abbildungen[3]) $d^{-1} r_2 = D^{-1} R_3$. Ferner findet sich der Ausdruck für $r_1 = r_2$ und R_3 sowie für R_1 bei J. W. Alexander und S. Kakeya.[4]) Das Ziel der vorliegenden Note ist, die noch fehlenden Konstanten r_3 und R_2 zu berechnen. Dies gelingt durch geeignete Anwendung des in der Fußnote [4]) zitierten Graceschen Satzes. Daß die Bestimmung dieser Konstanten erheblich schwieriger ist als die der vorangehenden, zeigt schon die Kompliziertheit der Resultate.

Wir wählen im folgenden stets $a = A = 0$. Den absoluten Betrag der (absolut) kleinsten Wurzel von $z^{-1} f(z)$ und $f'(z)$ bezeichnen wir wie oben mit d bzw. D.

---

[2]) Mann kann noch ϱ auf eine andere Weise charakterisieren; vgl. § 3.

[3]) Vgl. z. B. Pólya—Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Berlin, 1925), Bd. I, Abschnitt III, Aufgabe 110, S. 105, S. 277.

[4]) Ein einfacher Beweis ergibt sich aus dem weiter unten zu benutzenden Graceschen Satze. Vgl. meine Arbeit: Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, *Math. Zeitschrift*, **13** (1922), S. 28—55, insbesondere S. 53—54. Hier finden sich auch die Hinweise auf die betreffenden Stellen bei Alexander und Kakeya. — Vgl. ferner J. Dieudonné, Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, *Annales de l'École Normale Supérieure*, (3) **48** (1931), S. 247—358, insbesondere S. 315; schließlich auch L. Teodoriu, Sur les zéros de la dérivée d'une fonction holomorphe, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, (6) **13** (1931), S. 591—593.

§ 1. Berechnung von r_3.

Die Funktion $f(z) = z\,g(z)$ entwirft bekanntlich dann und nur dann ein konvexes Bild des Kreises $|z| < r$, wenn die Funktion

$$(1) \qquad 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = 1 + z\frac{z g''(z) + 2g'(z)}{z g'(z) + g(z)}$$

für $|z| < r$ *regulär und vom positiven Realteil* ist.[5])

Wir stellen die folgende algebraische Frage: Es seien z_0 und γ zwei komplexe Konstanten, $z_0 \neq 0$, $\Re\gamma \leq 0$. Wir betrachten die Gesamtheit aller Polynome $g(z)$ des festen Grades $n-1$, welche der Bedingung

$$(2) \qquad (1-\gamma)\,[z_0 g'(z_0) + g(z_0)] + z_0\,[z_0 g''(z_0) + 2g'(z_0)] = 0$$

genügen $(n \geqq 2)$. Was läßt sich dann über die Nullstellen von $g(z)$ aussagen?

Unsere Aufgabe hängt natürlich von der Wahl von z_0 und γ (ferner von n) ab. Die Gleichung (2) ist eine homogene lineare Beziehung zwischen den Koeffizienten von $g(z)$. Der höchste Koeffizient von $g(z)$ erhält dabei den Faktor

$$(1-\gamma)\,[(n-1)\,z_0^{n-1} + z_0^{n-1}] + z_0\,[(n-1)(n-2)\,z_0^{n-2} + 2(n-1)\,z_0^{n-2}] =$$
$$= n\,(n-\gamma)\,z_0^{n-1} \neq 0,$$

das Absolutglied von $g(z)$ den Faktor $1-\gamma \neq 0$. Nach dem Satz von Grace besitzt $g(z)$ mindestens eine Nullstelle in jedem Kreisbereiche, der sämtliche Wurzeln einer gewissen algebraischen Gleichung $(n-1)$-ten Grades umfaßt. Diese entsteht aus (2) für $g(z) = (z-x)^{n-1}$ und lautet:

$$(3) \qquad (1-\gamma)\,(z_0 - x)^{n-2}\,[(n-1)\,z_0 + z_0 - x] +$$
$$+ z_0\,(z_0 - x)^{n-3}\,[(n-1)(n-2)\,z_0 + 2\,(n-1)\,(z_0 - x)] = 0.$$

Sie ist genau vom Grade $n-1$ und hat $x = z_0$ zur $(n-3)$-fachen Wurzel; ferner besitzt sie noch zwei Wurzeln, die von z_0 offensichtlich verschieden sind.[6]) Setzt man

$$(n-1)\frac{z_0}{z_0 - x} = \zeta,$$

[5]) Vgl. a. a. O. [3]), Aufgabe 108.

[6]) Für $n = 2$ gibt es nur eine von z_0 verschiedene Wurzel.

so genügen diese der quadratischen Gleichung

$$(1-\gamma)\left((n-1)z_0+\frac{(n-1)z_0}{\zeta}\right)+z_0((n-2)\zeta+2(n-1))=0,$$

oder der Gleichung

$$(4)\quad \varphi(\zeta)=\frac{\frac{n-2}{n-1}\zeta^2+3\zeta+1}{\zeta+1}=\frac{n-2}{n-1}\zeta+\frac{2n-1}{n-1}-\frac{n}{n-1}\frac{1}{\zeta+1}=\gamma.$$

Die Funktion $\varphi(\zeta)$ ist aber vom positiven Realteil in der Halbebene $\Re\zeta>-R$, wobei $-R$ die größere Wurzel der Gleichung

$$\frac{n-2}{n-1}\zeta^2+3\zeta+1=0$$

bedeutet. In der Tat sind die Realteile der beiden ersten Glieder in dem zweiten Ausdruck für $\varphi(\zeta)$ auf jeder vertikalen Geraden $\Re\zeta=\Re(u+iv)=u=$ konst. von v unabhängig, während der Realteil des dritten Gliedes gleich

$$-\frac{n}{n-1}\frac{u+1}{(u+1)^2+v^2}$$

ist, so daß das Minimum von $\Re\varphi(\zeta)$ auf jeder vertikalen Geraden $\Re\zeta=u>-1$ für $v=0$ erreicht wird. Bei reellem ζ ist aber $\varphi(\zeta)$ reell und positiv für $\zeta>-R$, woraus wegen $R<1$ die Behauptung folgt.

Die beiden Wurzeln der Gleichung (4) liegen somit in der Halbebene $\Re\zeta\leqq-R$. Dieser entspricht in der x-Ebene eine Kreisscheibe, die aus der Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke $1,\ 1+\frac{n-1}{R}$ ist, durch „Multiplikation" mit z_0 entsteht. Da diese sämtliche Wurzeln von (3) enthält, so muß darin mindestens eine Wurzel von $g(z)$ liegen, d. h.

$$d\leqq\left(1+\frac{n-1}{R}\right)|z_0|.$$

Wählt man also

$$(5)\qquad |z_0|<\frac{d}{1+\frac{n-1}{R}},$$

so kann die Gleichung (2) *für keinen Wert von* γ, $\Re\gamma\leqq0$, stattfinden. Hieraus folgt aber, daß die eingangs erwähnte Konvexitätsbedingung in dem Kreise (5) erfüllt sein muß. Dabei ist zu beachten, daß für diese Werte von z_0 der Nenner $z g'(z) + g(z)$ in (1) nicht verschwinden kann. Im entgegengesetzten Falle würde nämlich der Grenzfall $\gamma = \infty$ von (2) stattfinden, woraus man nach (3) schließen könnte, daß $g(z)$ in jedem, die Punkte z_0 und $n z_0$ enthaltenden Kreise eine Nullstelle besitzt. Es müßte somit $d \leqq n|z_0|$ sein, was (5) widerspricht.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich natürlich auch, daß die Schranke (5) nicht verbessert werden kann. In der Tat ist (3) mit $\gamma = 0$ erfüllt, wenn

$$\zeta = -R, \quad \text{d. h.} \quad x = z_0\left(1 + \frac{n-1}{R}\right)$$

gesetzt wird, so daß die obige Konvexitätsbedingung für die Funktion

$$f(z) = z\left(z - \left(1 + \frac{n-1}{R}\right) z_0\right)^{n-1}$$

an der Stelle $z = z_0$ nicht stattfinden kann.

Eine leichte Rechnung liefert[7])

$$R = \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n-2}\left(3 - \sqrt{\frac{5n-1}{n-1}}\right),$$

$$\frac{1}{1 + \frac{n-1}{R}} = \frac{3n - 1 - \sqrt{(n-1)(5n-1)}}{2n^2}.$$

§ 2. Berechnung von R_2.

Die Funktion $f(z) = \int_0^z h(z)\, dz$ ist für $|z| < r$ dann und nur dann „sternförmig", wenn die Funktion

$$(1) \qquad z\,\frac{f'(z)}{f(z)}$$

für $|z| < r$ *regulär und vom positiven Realteil* ist.[8])

[7]) Für $n = 2$ ist $R = \frac{1}{3}$ zu setzen.

[8]) Vgl. a. a. O. [3]), Aufgabe 109.

Wir bezeichnen wieder mit z_0 und γ zwei komplexe Konstanten, $z_0 \neq 0$, $\Re\gamma \leq 0$, und betrachten die Polynome $(n-1)$-ten Grades $h(z)$, welche der Bedingung

$$(2) \qquad -\gamma f(z_0) + z_0 f'(z_0) = -\gamma \int_0^{z_0} h(z)\,dz + z_0 h(z_0) = 0$$

genügen ($n \geq 2$). In dem Spezialfall $h(z) = (z-x)^{n-1}$ geht diese Gleichung in die folgende über:

$$(3) \qquad -\gamma \int_0^{z_0} (z-x)^{n-1}\,dz + z_0 (z_0 - x)^{n-1} =$$

$$= -\gamma \frac{(z_0 - x)^n - (-x)^n}{n} + z_0 (z_0 - x)^{n-1} = 0.$$

Im Falle $\gamma = 0$ ist die einzige Wurzel dieser Gleichung $x = z_0$. Sonst sind die Wurzeln alle von z_0 verschieden; sie genügen der Ungleichung $\Re\psi(z_0^{-1}x) \leq 0$, wobei

$$(4) \qquad \frac{(1-x)^{n-1}}{(1-x)^n - (-x)^n} = \psi(x)$$

gesetzt worden ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}$ die Menge der x-Werte, für welche $\Re\psi(x) \leq 0$ gilt, und mit K den Maximalbetrag der Punkte von $\mathfrak{B}$. (Die Menge $\mathfrak{B}$ ist abgeschlossen, ferner beschränkt, da $\psi(\infty) = \frac{1}{n}$ gilt. Außerdem hat man $\mathsf{K} \geq 1$, da $\psi(x)$ für $x = 1$ verschwindet.) Dann liegen die Wurzeln von (3) im Kreise $|x| \leq \mathsf{K}\,|z_0|$, und darin muß auch mindestens eine Nullstelle von $h(z) = f'(z)$ enthalten sein, d. h.

$$D \leq \mathsf{K}\,|z_0|.$$

Wählt man also

$$(5) \qquad |z_0| < \frac{D}{\mathsf{K}},$$

so kann (2) nicht erfüllt sein. Ferner ist dann auch $f(z_0) = \int_0^{z_0} h(z)\,dz \neq 0$. Sonst wäre nämlich (2) mit $\gamma = \infty$ erfüllt, und $h(z)$ müßte dann in jedem, die Nullstellen von

$$(z_0 - x)^n - (-x)^n = 0$$

enthaltenden Kreise eine Nullstelle haben. Nun sind diese Nullstellen

$$x = x_\nu = \frac{z_0}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und man hat

$$|x_\nu| = \frac{|z_0|}{2 \sin \frac{\pi \nu}{n}} \leqq \frac{|z_0|}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = |x_1|.$$

Es müßte somit $D \leqq |x_1|$ sein. Andererseits gilt aber $D > \mathrm{K}\,|z_0| \geqq \geqq |x_1|$, da die Funktion $\psi(x)$ für $x = z_0^{-1} x_1$ einen einfachen Pol besitzt. Alles zusammenfassend ist also die gesuchte Schranke $R_2 = D\frac{\varrho_n}{n}$, wobei $\frac{\varrho_n}{n} = \frac{1}{\mathrm{K}}$ ist. Sie wird für die Funktion

$$f(z) = \int_0^z (z - \xi)^{n-1} dz$$

erreicht; hierbei gilt $\Re\, \psi(\xi) \leqq 0$, $|\xi| = \mathrm{K}$.

Setzt man $\frac{1}{x} = w$, so kann $\frac{\varrho_n}{n}$ als der Radius des größten Kreises $|w| < \frac{\varrho_n}{n}$ charakterisiert werden, in dem

$$\frac{1}{\psi(x)} = \frac{(1-x)^n - (-x)^n}{(1-x)^{n-1}} = 1 + \frac{1}{w}\left(\frac{1}{(1-w)^{n-1}} - 1\right) =$$

$$= n + \binom{n}{2} w + \binom{n+1}{3} w^2 + \cdots$$

vom positiven Realteil ist.

§ 3. Asymptotische Berechnung von ϱ_n.

Setzt man in der Endbetrachtung des vorigen Paragraphen $w = \frac{\zeta}{n}$, so folgt

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,\psi\left(\frac{n}{\zeta}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{1 + \frac{n}{\zeta}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{n}\right)^{n-1}} - 1\right)\right\} =$$

$$= \frac{e^\zeta - 1}{\zeta} = 1 + \frac{\zeta}{2!} + \frac{\zeta^2}{3!} + \cdots,$$

u. zw. gleichmäßig in jedem festen Kreise der ζ-Ebene. Es sei ϱ der größte Kreis $|\zeta| < \varrho$, in dem diese Grenzfunktion vom positiven Realteil ist. Da der Realteil derselben in jedem Kreise $|\zeta| \leq \varrho - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ein positives Minimum besitzt, so wird für genügend große Werte von n offenbar $\varrho_n > \varrho - \varepsilon$. Andererseits kann für jeden positiven Wert von ε ein Wert ζ_0 mit $|\zeta_0| = \varrho + \varepsilon$ angegeben werden, für den der fragliche Realteil negativ ausfällt. Hieraus folgt wiederum $\varrho_n < \varrho + \varepsilon$ für genügend große n, und also

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_n = \varrho. \tag{2}$$

Nach der Carathéodoryschen Ungleichung für die Koeffizienten der Funktionen mit positivem Realteil können ϱ_n und ϱ leicht abgeschätzt werden. Es ist

$$\varrho_n \leq \frac{4n}{n-1}, \qquad \varrho \leq 4. \tag{3}$$

Zur näheren Charakterisierung von ϱ setze man $\zeta = re^{i\varphi}$. Für $r = \varrho$ wird

$$r \Re \frac{e^{\zeta} - 1}{\zeta} = e^{\varrho \cos\varphi} \cos(\varrho \sin\varphi - \varphi) - \cos\varphi$$

eine nichtnegative Funktion von φ, deren Minimum gleich 0 ist. Man hat somit für einen geeigneten Wert von φ

$$e^{\varrho\cos\varphi} \cos(\varrho \sin\varphi - \varphi) = \cos\varphi, \tag{4}$$

$$e^{\varrho\cos\varphi} [\sin(\varrho\sin\varphi - \varphi)(\varrho\cos\varphi - 1) + \\ + \varrho \sin\varphi \cos(\varrho\sin\varphi - \varphi)] = \sin\varphi \tag{5}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt durch Berücksichtigung der ersten

$$e^{\varrho\cos\varphi} \sin(\varrho\sin\varphi - \varphi)(\varrho\cos\varphi - 1) + \varrho\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi. \tag{6}$$

Wäre nun $\varrho\cos\varphi - 1 \neq 0$, so würde aus dieser Gleichung

$$e^{\varrho\cos\varphi} \sin(\varrho\sin\varphi - \varphi) = -\sin\varphi \tag{7}$$

folgen, d. h. infolge (4), $\cos\varphi = 0$. Dann müßte aber ebenfalls wegen (4)

$$\cos(\varrho\sin\varphi - \varphi) = \sin(\varrho\sin\varphi)\sin\varphi = 0,$$
$$\sin(\varrho\sin\varphi) = 0, \ \sin\varrho = 0,$$

d. h. $\varrho = k\pi$ sein, k ganz, woraus, da $\varrho \leq 4$ ist, $\varrho = \pi$ folgt. Weiter müßte wegen (7)

$$\sin(\pi\sin\varphi - \varphi) = -\cos(\pi\sin\varphi)\sin\varphi = -\sin\varphi$$

gelten, d. h. $\cos(\pi \sin\varphi) = 1$, $\cos\pi = 1$. Das ist aber ein Widerspruch.

Folglich hat man $\varrho \cos\varphi = 1$ und (4) lautet, indem man $\operatorname{tg}\varphi = \tau$ setzt,

$$e \cos(\operatorname{tg}\varphi - \varphi) = \cos\varphi,$$
$$e(\cos(\operatorname{tg}\varphi) + \operatorname{tg}\varphi \sin(\operatorname{tg}\varphi)) = e(\cos\tau + \tau \sin\tau) = 1.$$

Man kann $\tau > 0$ annehmen. Wegen $\cos\varphi = \frac{1}{\varrho} \geqq \frac{1}{4}$ ist $\tau = \operatorname{tg}\varphi \leqq \sqrt{15} < \frac{3\pi}{2}$. Die Funktion $\cos\tau + \tau\sin\tau$ ist für $0 \leqq \tau \leqq \frac{\pi}{2}$ wachsend, für $\frac{\pi}{2} \leqq \tau \leqq \frac{3\pi}{2}$ abnehmend; den Wert e^{-1} nimmt sie von 0 bis $\frac{3\pi}{2}$ nur einmal an, u. zw. zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π. Es ist $\varrho = \sqrt{1+\tau^2}$.

(Eingegangen am 27. Januar 1932.)